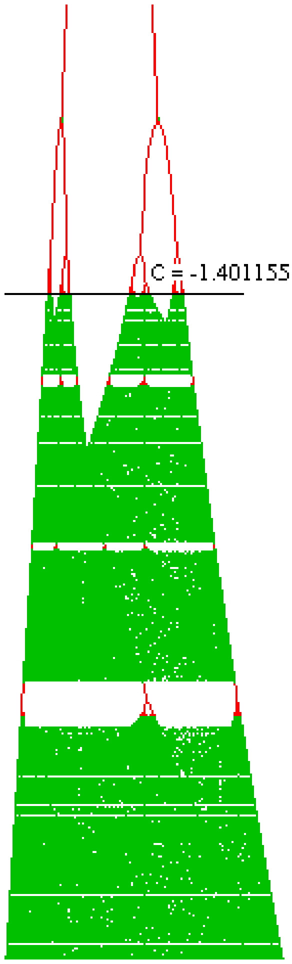
5. Chaos



Voordat we verder gaan met de Mandelbrot Fractal, is het goed om even stil te staan bij de Feigenbaum boom en het optreden van chaos. De boom is hiernaast (in de c-richting uitvergroot en zonder 'stam') nog een keer weergegeven.

Het blijkt dat het gebied waar periodeverdubbeling optreedt, eindigt bij een waarde van c = -1.401155..
Wordt c nog negatiever, dan zijn er nog steeds gebieden met x-waardes die worden aangetrokken, maar er ontstaat geen zichzelf herhalend patroon. De aantrekker is een **"Strange Attractor"** geworden. De opeenvolgende iteraties leveren **chaos** op. In dit groene chaosgebied bevinden zich overigens nog wel kleine 'eilandjes' van regelmaat.

Wat betekent dat, chaos?
We noemen een proces chaotisch wanneer we niet voorspellen kunnen wat er gaat gebeuren.

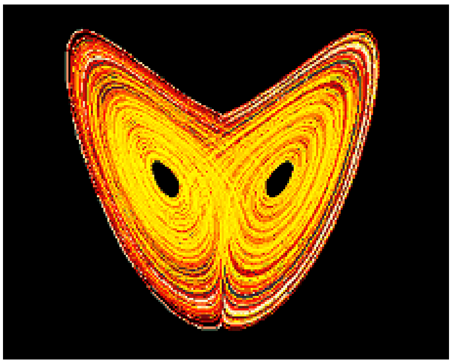
In het verdubbelingsgebied is alles voorspelbaar.
Een startwaarde van x komt, vaak na een 'aanloopje', in een cyclus terecht.
Wanneer we een andere startwaarde kiezen, is het aanloopje mischien verschillend, maar ook dan kom je in dezelfde cyclus terecht.

In het chaotisch gebied komt een startwaarde van x niet meer in een cyclus terecht, maar springt op chaotische wijze heen en weer
Bovendien blijkt dat voor andere startwaarden, zelfs als ze vlak in de buurt van de eerste liggen, de iteraties al snel van elkaar gaan verschillen.

Deze gevoeligheid voor de keuze van de startwaarde (in het Engels: **Sensitive Depencence om Initial Conditions**) blijkt karakteristek te zijn voor alle chaotische systemen. Want de parabool die we nu bestuderen is slechts een simpel voorbeeld. De chaostheorie die in de zeventiger jaren van de vorige eeuw opkwam, ontdekte dat chaotische systemen overal voorkomen. Een bekend voorbeeld van een chaotisch systeem zijn de processen rond luchtdruk en temperatuur, die zich in de atmosfeer afspelen en die het weer bepalen. De Amerikaanse meteoroloog Lorenz ontdekte in die tijd min of meer bij toeval dat de resultaten van zijn modelberekeningen heel anders werden, wanneer hij invoergegevens gebruikte die een fractie verschillend waren.

Extreme gevoeligheid voor de startwaarde betekent in de praktijk **onvoorspelbaarheid**. Je kunt, bijvoorbeeld bij het weersysteem, nog zo je best doen om de beginwaarden (temperaturen, luchtdrukken, etc) nauwkeurig op te meten, er zal altijd een onzekerheid overblijven. Vroeger, voordat chaos werd ontdekt, dacht men dat dit inhield dat hooguit ook de voorspelling niet helemaal precies zou zijn. Maar nu weten we dat die beginonzekerheid als het ware "opblaast" en grote effecten kan hebben op de voorspelling.

Een vlinder die een keer extra met zijn vleugels slaat, kan de oorzaak zijn van een orkaan.



Dit romantische beeld kom je telkens weer tegen in verhalen over chaos, omdat de visuele weergave van de berekeningen die Lorenz uitvoerde, wel wat weg hebben van een vlinder.
De wiskunde achter deze berekeningen is aanzienlijk gecompliceerder dan bij onze simpele parabool, maar ook hier is er een parameter c, waarvan de keuze bepaalt of er regelmatig of chaotisch gedrag optreedt. Met de onderstaande Lorenz applet kun je zelf aan het werk.

Lorenz Applet

De berekeningen van Lorenz zijn ruimtelijk, in drie dimensies. In de applet worden de resultaten in het platte vlak geprojecteerd. Door ergens in het vlak te klikken start je het proces. Om precies te zijn, er starten tegelijk **acht** processen, met heel kleine verschillen in de startwaarde.
Je kunt de waarde van c wijzigen. Wanneer je dan op de "Set" knop drukt, gaan de berekeningen verder met de nieuwe waarde van c. Bij lage waarden van c (probeer 5 of 10) zijn er vaste aantrekkers.
Met "Clear" maak je het plaatje schoon, zonder de berekeningen te stoppen.
De "Reset" knop stopt de berekening en brengt alles terug in de begintoestand.

Experimenteer en geniet!

Feigenbaum ← Inhoudsopgave → Complexe Getallen