6. Getallen

De paraboolfunctie die we bestudeerd hebben, is een functie van x, waarbij x een getal is. Wat voor soort getal? In deze paragraaf gaan we het hebben over de verschillende soorten getallen die er zijn.

De eerste getallen waar je als kind mee te maken krijgt zijn de gehele getallen 1,2,3...
Op de basisschool wordt dat uitgebreid, eerst met het getal 0 en de negatieve gehele getallen. Sommetjes zoals $7 + x = 3$ kun je dan oplossen, maar $7x = 3$ nog niet. De volgende stap is daarom dat de breuken (**rationale getallen**) worden ingevoerd. Bijvoorbeeld $3/7 = 0.428571428...$
We zijn dan al een heel eind, maar een sommetje zoals $x^2 = 2$ heeft nog steeds geen oplossing. De getallenverzameling wordt daarom op de middelbare school uitgebreid met "wortelgetallen" ofwel de **reële getallen** zoals $\sqrt{2} = 1.41421356...$

De vraag aan het begin van deze paragraaf kan nu beantwoord worden. Zowel x als c zijn reële getallen.

Er blijft nog één onoplosbaar sommetje over, namelijk $x^2 = -4$.
Wortels trekken uit een negatief getal kan niet.
Kunnen we onze verzameling getallen nog verder uitbreiden, zodat het wel kan?

Het antwoord is ja.

Ter introductie bekijken we eerst het rekenen van getallen eens op een wat ongebruikelijke manier. Laten we getallen eens opvatten als "vectoren", pijltjes met een lengte die een bepaalde richting hebben. Die richting kunnen we uitdrukken in de hoek die de pijl maakt met bijvoorbeeld de positieve x-as.
Het getal +2 is dan een pijl met lengte 2 die een hoek van 0 graden maakt met die positieve x-as. Omdat hoeken na 360 graden weer hetzelfde zijn, kun je ook zeggen dat het pijltje een hoek van 360 graden maakt (of 720, enz)
Het getal -2 is een pijl met lengte 2 die een hoek maakt van 180 (of 540 enz) graden met de positieve x-as.

We spreken nu "nieuwe" regels af voor het vermenigvuldigen en delen van getallen en voor worteltrekken en kwadrateren:

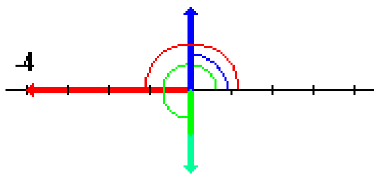
Vermenigvuldigen:	**Vermenigvuldig de lengtes van de pijltjes en tel de hoeken op.**
Delen:	**Deel de lengtes van de pijltjes en trek de hoeken van elkaar af.**
Worteltrekken:	**Trek de wortel uit de lengte en halveer de hoek.**
Kwadrateren:	**Kwadrateer de lengte en verdubbel de hoek.**

Neem bijvoorbeeld: $x = (-2).(-3)$
Volgens de 'gewone' regel is het antwoord x = +6, want "min keer min is plus".
Volgens de nieuwe regel: De lengte van de pijl wordt 6 en de hoek wordt 180 + 180 = 360 graden, antwoord is dus x = +6

Nog een voorbeeld: $x^2 = 4$
Oude regel: het antwoord is x = +2 of -2 , er zijn twee oplossingen, dat was de afspraak
Nieuwe regel: de wortel uit de lengte is 2, de gehalveerde hoek wordt 0/2=0 **of** 360/2=180 graden. Dus twee oplossingen, die vanzelf uit de nieuwe regel volgen!

Tot nu toe niets nieuws, maar laten we nu eens kijken naar $x^2 = -4$. Onze nieuwe regel voor worteltrekken geeft nu:
De wortel uit de lengte is 2, de gehalveerde hoek wordt 180/2=90 of 540/2=270 graden.

Op zich geen probleem, maar het resultaat is verrassend: deze getallen liggen niet meer op de getallenlijn!
Het zijn pijltjes met lengte 2 die loodrecht op die getallenlijn staan.



We zullen dus onze verzameling getallen moeten uitbreiden met getallen in een vlak, het **complexe getallenvlak**